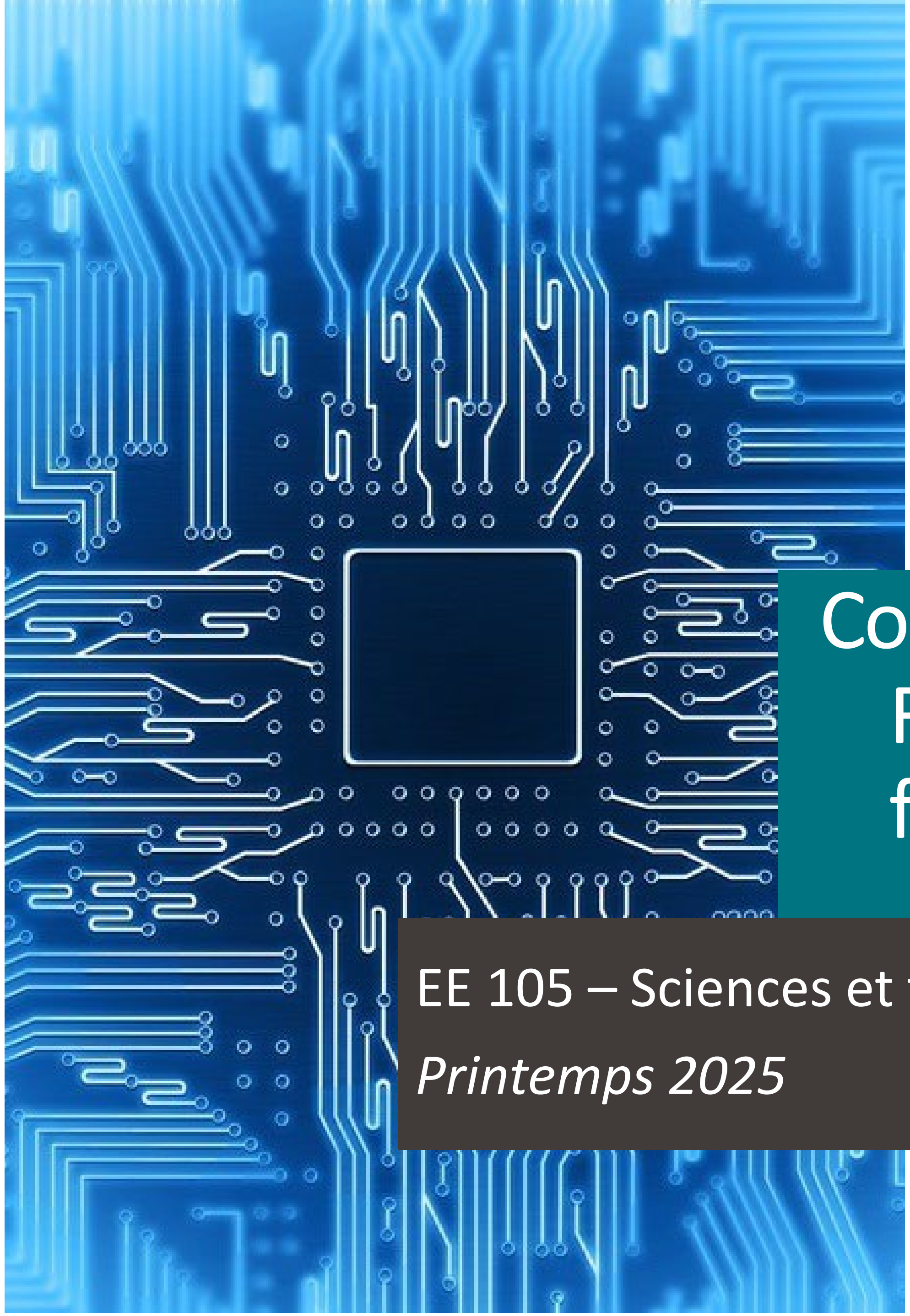
EPFL



Cours 10
Filtres et comportement fréquentiel

EE 105 – Sciences et technologies de l'électricité

Printemps 2025

Prof. Camille Brès - camille.bres@epfl.ch

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

Rappel sur les notations

$u = \hat{U}\cos(\omega t + \alpha)$: valeur instantanée de la tension

$\underline{u} = \hat{U}e^{j(\omega t+\alpha)}$: valeur instantanée complexe associée

$\underline{\hat{U}} = \hat{U}e^{j\alpha}$: le phaseur de crête complexe associé

$\underline{U} = \frac{\underline{\hat{U}}}{\sqrt{2}} = Ue^{j\alpha}$: le phaseur efficace complexe associé

Les grandeurs dépendant du temps associées à un circuit <u>sous la même fréquence d'excitation</u> ont la même fréquence: le terme correspondant ($e^{j\omega t}$) peut donc être extrait des calculs

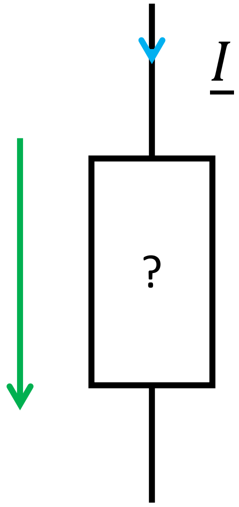
$$u(t) = \hat{U}\cos(\omega t + \varphi_u) \to \underline{U} = Ue^{j\varphi_u}$$

Rappel sur impédances

L'impédance complexe $\underline{Z}$ d'un dipôle associé à une fréquence donnée en régime permanent sinusoïdal est le quotient de la tension par le courant complexe

$$\underline{I} = Ie^{j\beta}$$

$$\underline{U} = Ue^{j\alpha}$$



$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{Ue^{j\alpha}}{Ie^{j\beta}} = \frac{U}{I}e^{j(\alpha-\beta)} \Rightarrow \underline{Z} = Ze^{j\varphi} = Z\cos(\varphi) + jZ\sin(\varphi)$$

	$\underline{\boldsymbol{Z}}$	$\boldsymbol{Re}(\underline{\boldsymbol{Z}})$	$\boldsymbol{Im}(\underline{\boldsymbol{Z}})$	$\boldsymbol{\varphi}$
Résistance $\boldsymbol{R}$	R	R	0	0
Inductance $\boldsymbol{L}$	$j\omega L$	0	ωL	$\frac{\pi}{2}$
Condensateur $\boldsymbol{C}$	$\frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$	0	$-\frac{1}{\omega C}$	$-\frac{\pi}{2}$

Description

Aujourd'hui

- Retour sur la superposition en régime sinusoïdal
- Concept de quadrupôle
- Les filtres

Semaine prochaine

- Théorèmes de Thévenin/Norton, et puissances

Retour sur superposition

Rappel du principe de superposition

Dans un circuit linéaire qui comportent plusieurs sources on considère successivement chaque source isolée.

- C'est-à-dire avec toutes les autres sources éteintes.

Si toutes les sources ont la même fréquence, alors la valeur totale est la somme vectorielle des contributions individuelles. Par exemple si on cherche un courant:

- Source n°1, autres sources éteintes $\Longrightarrow \underline{I}_1$
- Source n°2, autres sources éteintes $\Longrightarrow \underline{I}_2$
- Source n°N, autres sources éteintes $\Longrightarrow \underline{I}_N$

$$\underline{I}_{tot} = \sum_{j=1}^{N} \underline{I}_j$$

A noter que ceci est valable pour les courants et les tensions mais pas pour les puissances (que nous verrons la semaine prochaine)

- Le calcul pour les puissances étant non linéaire, le principe de superposition de n'applique pas.

Principe de superpostion

Si les sources ont des fréquences différentes, alors on traitera le problème par groupes de fréquences égales. Exemple avec 2 fréquences:

- Pulsation ω_1: $\underline{I}_{\omega_1} = I_{\omega_1} e^{j(\phi_{tot1})}$ - *notation phaseur efficace complexe associé*

- Pulsation ω_2: $\underline{I}_{\omega_2} = I_{\omega_2} e^{j(\phi_{tot2})}$ - *notation phaseur efficace complexe associé*

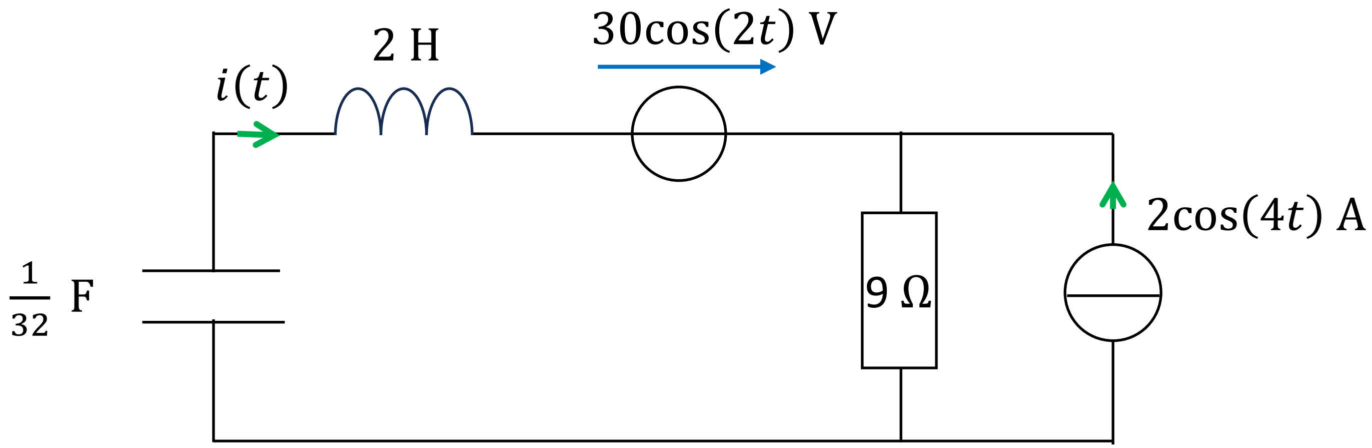
Nous ne pouvons pas combiner des phaseurs qui n'ont pas la même pulsation.

La somme des systèmes individuels doit être effectuée dans le domaine temporel:

- $\underline{i} = \sqrt{2} I_{\omega_1} e^{j(\omega_1 t + \phi_{tot1})} + \sqrt{2} I_{\omega_2} e^{j(\omega_2 t + \phi_{tot2})}$ - *notation valeur instantanée complexe*

- $i = \sqrt{2} I_{\omega_1} \sin(\omega_1 t + \phi_{tot1}) + \sqrt{2} I_{\omega_2} \sin(\omega_2 t + \phi_{tot2})$ - *notation valeur instantanée*

Exemple

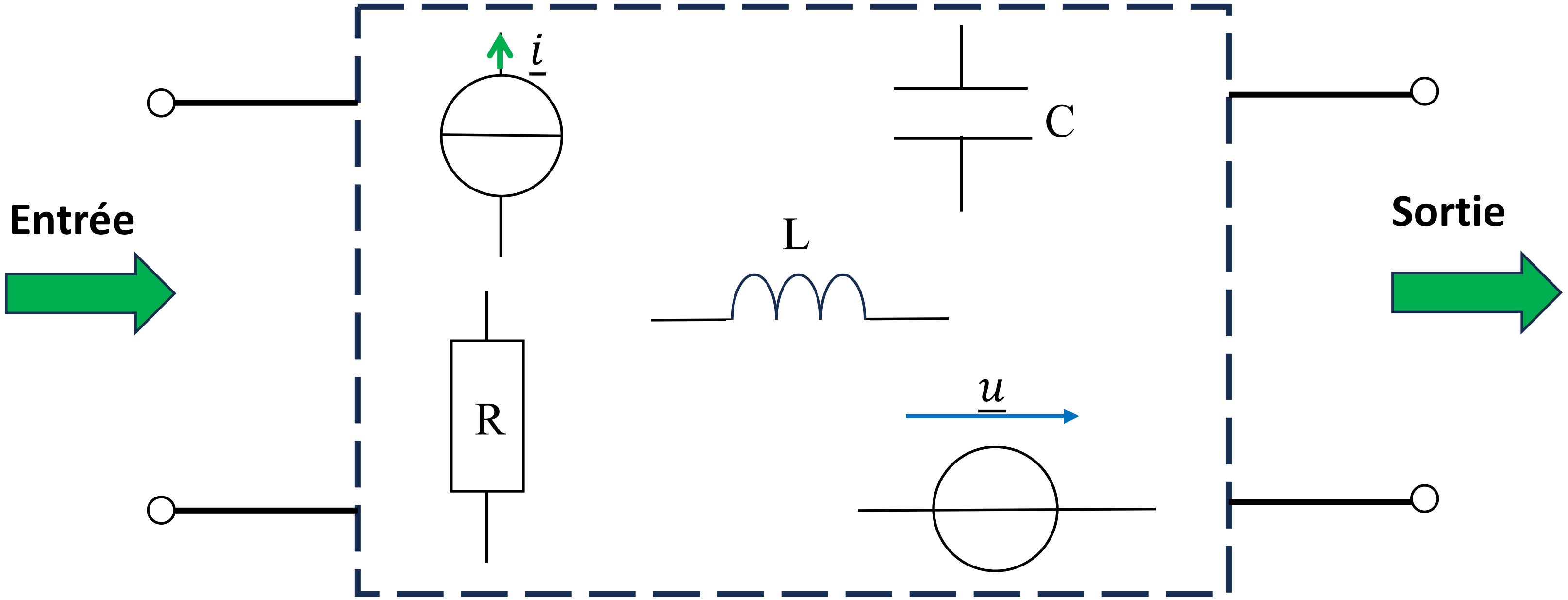


$2\ \mathrm{H}$
$30\cos(2t)\ \mathrm{V}$
$i(t)$
$2\cos(4t)\ \mathrm{A}$
$\frac{1}{32}\ \mathrm{F}$
$9\ \Omega$

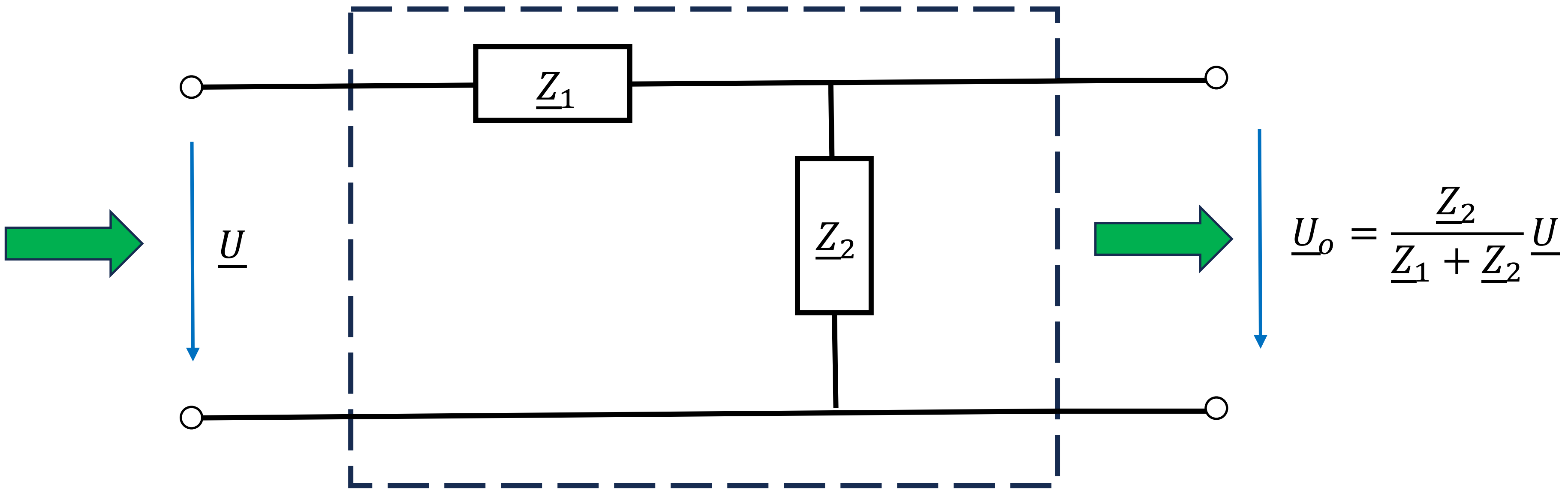
Filtres

Notion de quadripôle

Le quadripôle lie une grandeur de sortie à une grandeur d'entrée en fonction des composants et de la fréquence.



Exemple: le diviseur de tension



Les impédances peuvent dépendre de la fréquence.

- On voit qu'avec seulement deux éléments simples, nous pouvons créer une relation entrée/sortie qui va varier en fonction de la fréquence
- Exemple: $\underline{Z}_1 = R$ et $\underline{Z}_2 = \frac{1}{j\omega C}$

Fonction de transfert

Le quadripôle peut etre représenté par une fonction de transfert $\underline{H}(\omega)$ qui lie la tension d'entrée $\underline{U}_{in}(\omega)$ à la tension de sortie $\underline{U}_{out}(\omega)$:

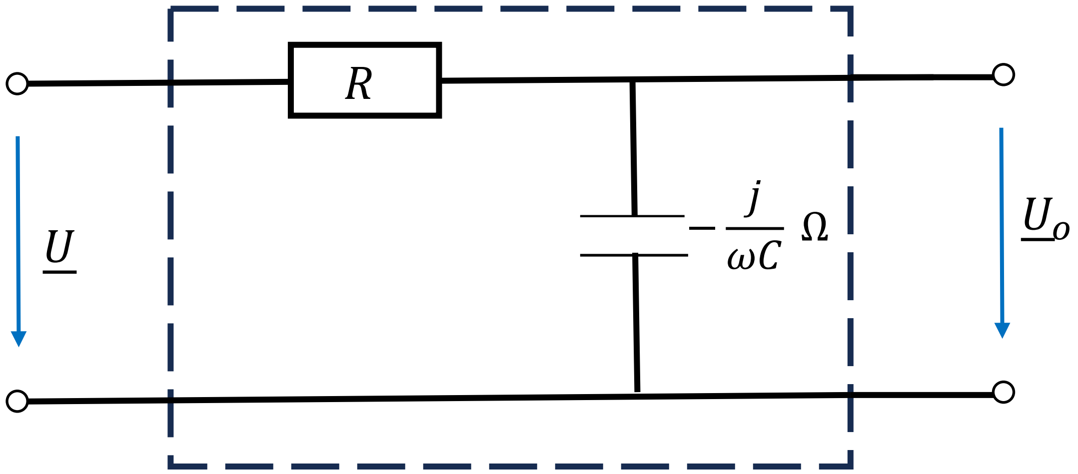
$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{U}_{out}(\omega)}{\underline{U}_{in}(\omega)}$$

La fonction de transfert est à valeurs complexes: elle a une **amplitude** et une **phase:**

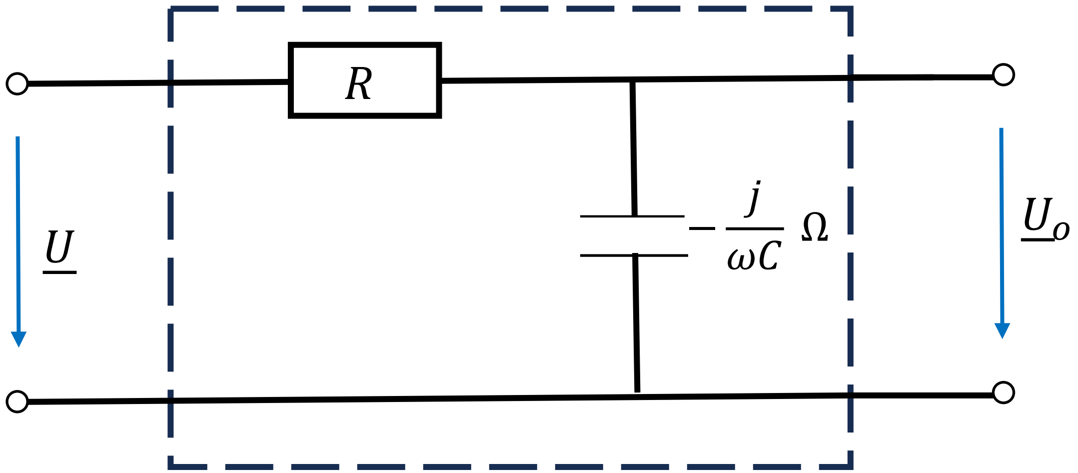
$$\underline{H}(\omega) = \left|\underline{H}(\omega)\right| \exp\left(j\phi(\omega)\right)$$

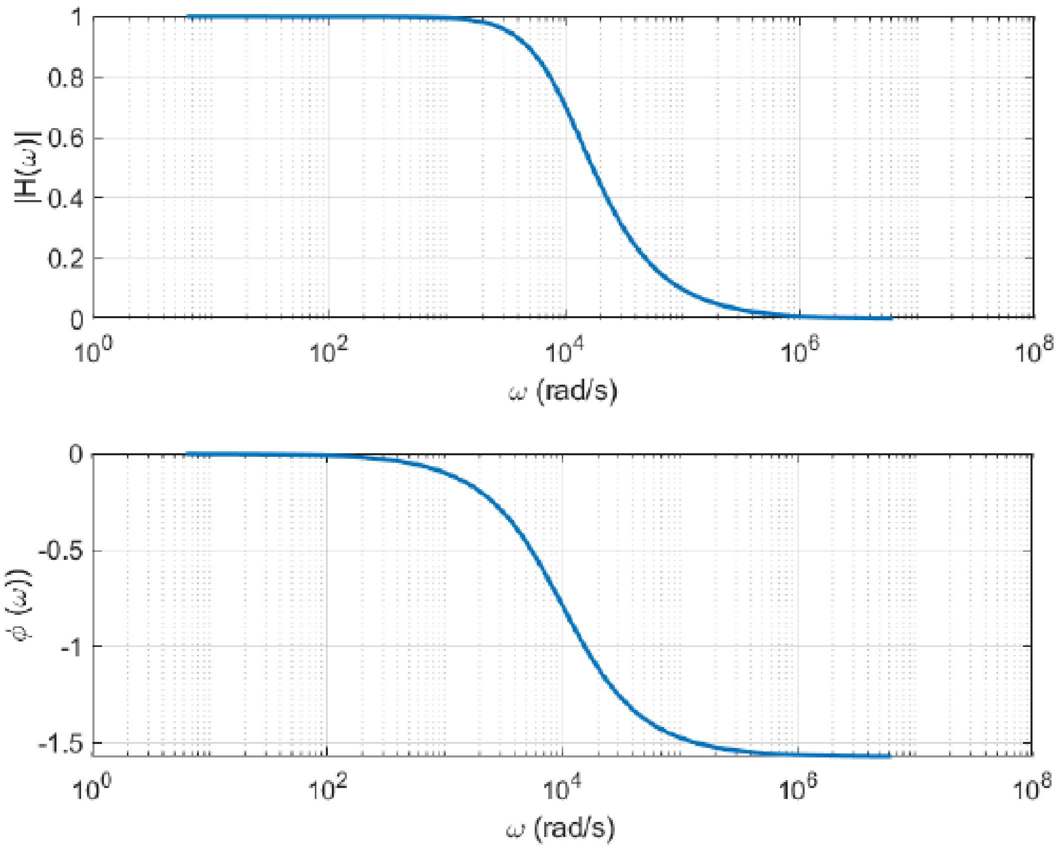
- $\left|\underline{H}(\omega)\right|$ donne le rapport des amplitudes entre sortie et entrée (souvent appelé 'gain')
- $\phi(\omega)$ donne le déphasage entre sortie et entrée
- On représente la fonction de transfert par des graphes appelés diagrammes de Bode

Exemple circuit RC



Exemple circuit RC





Filtres

Un filtre en électronique est un circuit qui réalise une opération volontaire de mise en forme d'une grandeur électrique

On considère l’entrée et la sortie du filtre comme étant des tensions: $\underline{U}_{in}(\omega)$ et $\underline{U}_{out}(\omega)$

- Un filtre peut donc être considéré comme un quadripôle et représenté par une fonction de transfert

Dépendant de la fonction de transfert, certaines fréquences peuvent être atténuées alors que d’autres ne le sont pas (effet du ‘gain’)

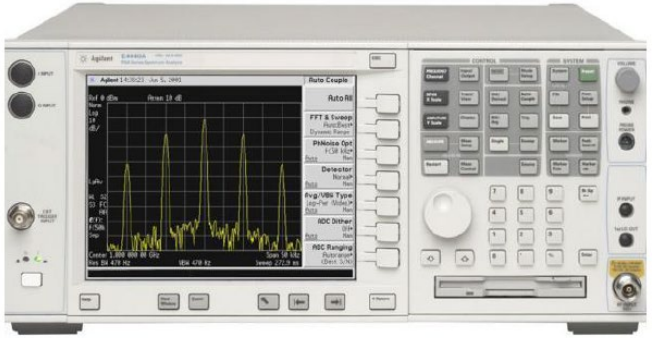
Filtres

Les filtres sont des éléments majeurs en électronique

Traitement du son

Radio

Communications



Mesure

Filtres: termes importants

Bande passante:

- L'étendue des *fréquences* entre lesquelles un signal à l'entrée passe à la sortie

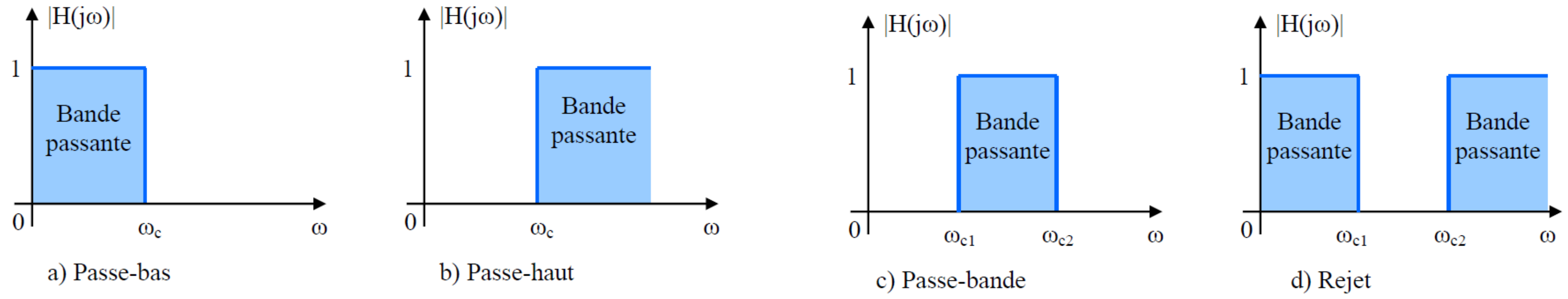
Bande atténuée

- L'étendue des fréquences où l'amplitude d'un signal est atténuée et n'apparaît pas à la sortie

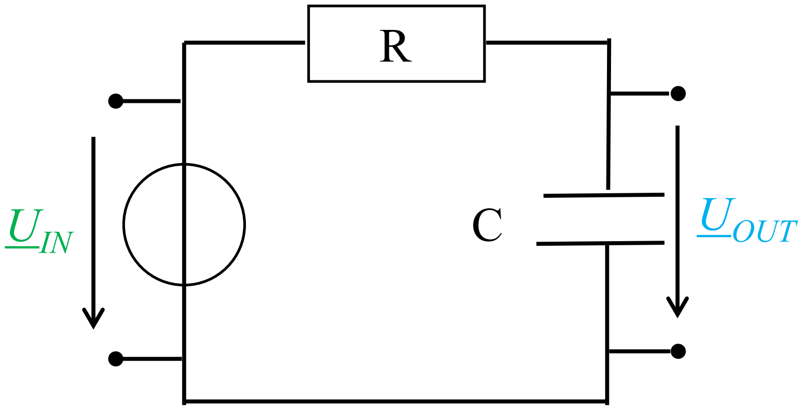
Une ***fréquence/pulsation de coupure*** sépare la bande passante de la bande atténuée

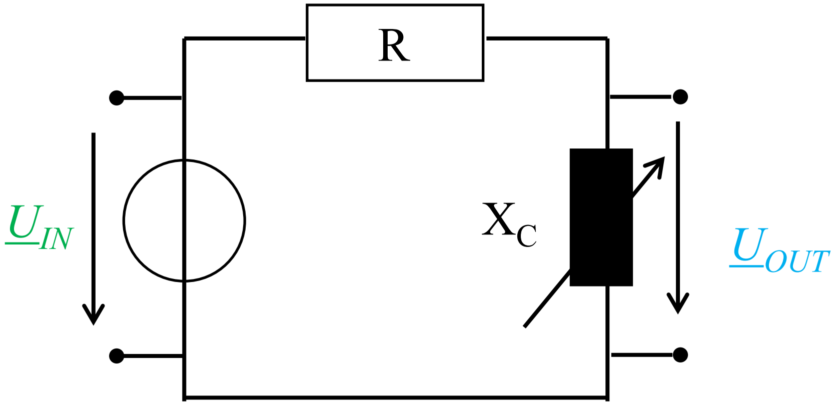
Les filtres sont caractérisés selon leur réponse en fréquence

- La variation de l'amplitude est le critère le plus important



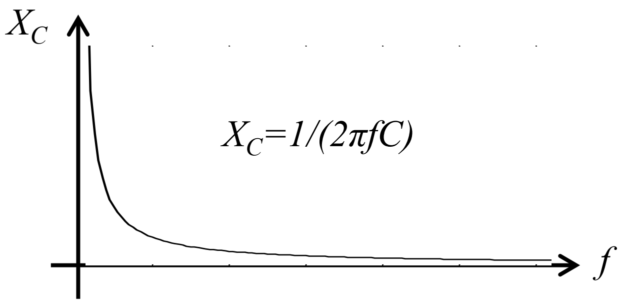
Filtre passe bas passif - exemple





Analyse qualitative:

- dépendance de la réactance sur *f*:



- Relation entrée/sortie:

$$\underline{U}_{out} = \frac{jX_C}{R + jX_C}\underline{U}_{in} = \frac{1}{1 - \frac{jR}{X_c}}\underline{U}_{in}$$

$$U_{out} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{R}{X_c}\right)^2}} U_{in}$$

Plus la fréquence augmente, plus la tension de sortie diminue

Filtre passe bas

Pulsation de coupure (fréquence quadrantale) ω_c

Pour les filtres réels, elle est la pulsation à laquelle l'amplitude de la sortie de la fonction de transfert (i.e le gain) est à $\frac{1}{\sqrt{2}}$ de la valeur maximale

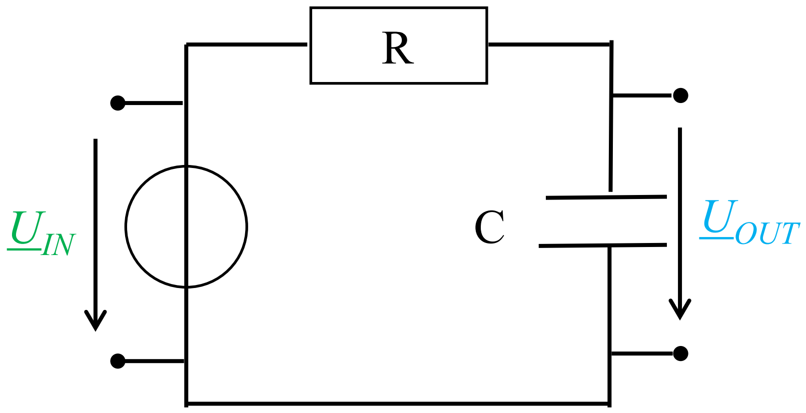
$$\left|\underline{H}(\omega_c)\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\underline{H}_{max}\right|$$

- Note: le gain étant défini par le rapport de tensions, il correspond à la pulsation à laquelle **la puissance** est diminuée de moitié ($P \propto U^2$)
- On a aussi la fréquence de coupure: $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$

Pour un filtre RL (RC), f_c est la fréquence pour laquelle la réactance X_L (X_C) est égale à R:

- On peut donc choisir la fréquence de coupure en faisant un choix approprié de valeur de résistance, inductance et/ou capacité

Retour sur le filtre RC



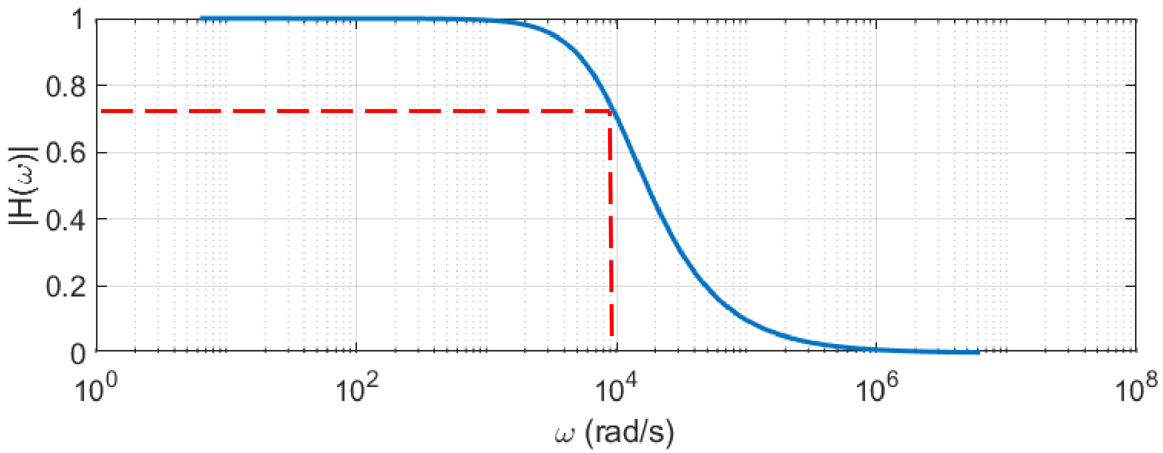
$$\left|\underline{H}(\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}$$

$\left|\underline{H}(\omega)\right|$ est maximale pour $\omega = 0$ et $\left|\underline{H}_{max}\right| = 1$

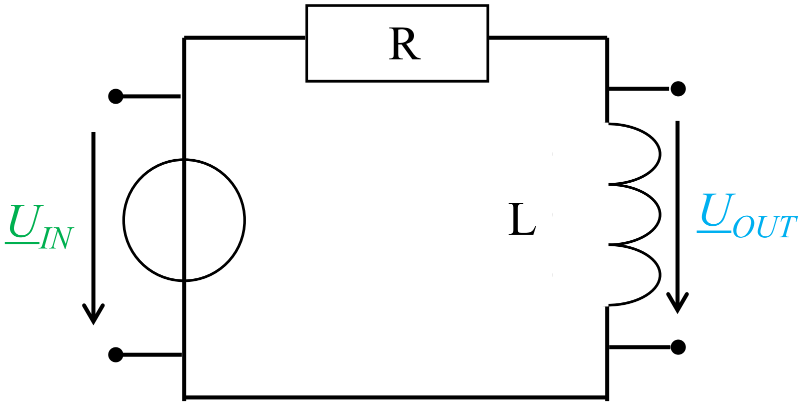
$$\left|\underline{H}(\omega_c)\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\underline{H}_{max}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+(\omega_c RC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \omega_c RC = 1$$

$$\Leftrightarrow \omega_c = \frac{1}{RC}$$



Filtre passe-haut



Filtre passe bande passif

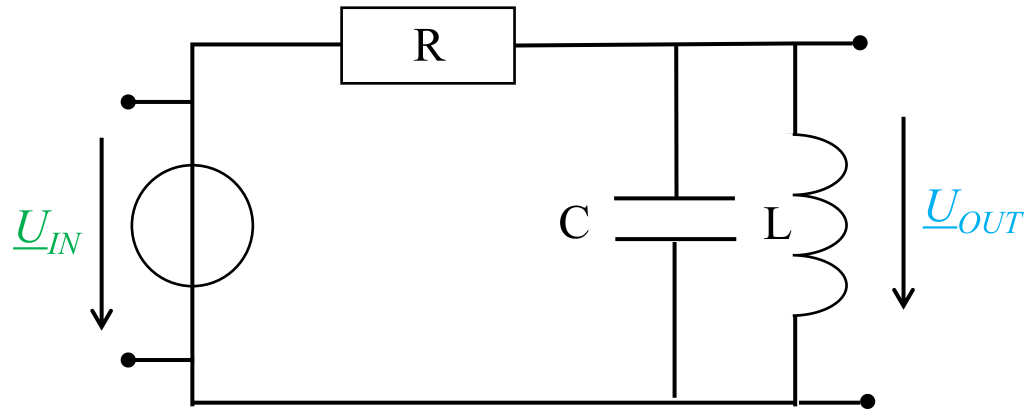
Les filtres passe-bande ont 2 fréquences de coupure ω_{c1} et ω_{c2}, et quelques caractéristiques additionnelles:

- **Pulsation centrale** ω_0: c'est la fréquence à laquelle la fonction de transfert du filtre $\underline{H}(\omega)$ est purement réelle:
  - Aussi appelée ***pulsation de résonance***
  - Elle est la moyenne géométrique des pulsations de coupure: $\omega_0 = \sqrt{\omega_{c1}\omega_{c2}}$

- ***Largeur de bande*** β : largeur de la bande passante entre les 2 fréquences de coupure, $\beta = \omega_{c2} - \omega_{c1}$ (pour $\omega_{c1} < \omega_{c2}$)

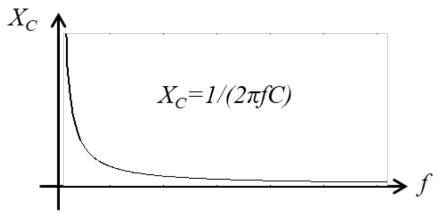
- ***Facteur de qualité*** Q: le rapport entre la fréquence centrale et la largeur de bande, $Q = \frac{\omega_0}{\beta}$
  - Mesure de la largeur de la bande passante indépendamment de la fréquence centrale
  - Il permet d'ajuster la largeur de la bande passante.

Filtre passe bande passif RLC

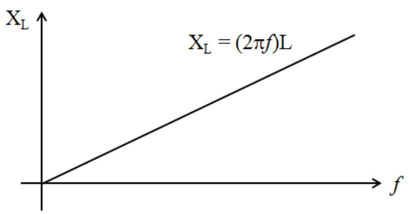


Analyse qualitative:

- A hautes fréquences: le condensateur agit comme un ***court-circuit***, pas de tension à ses bornes donc $\underline{U}_{OUT} \longrightarrow 0$ V

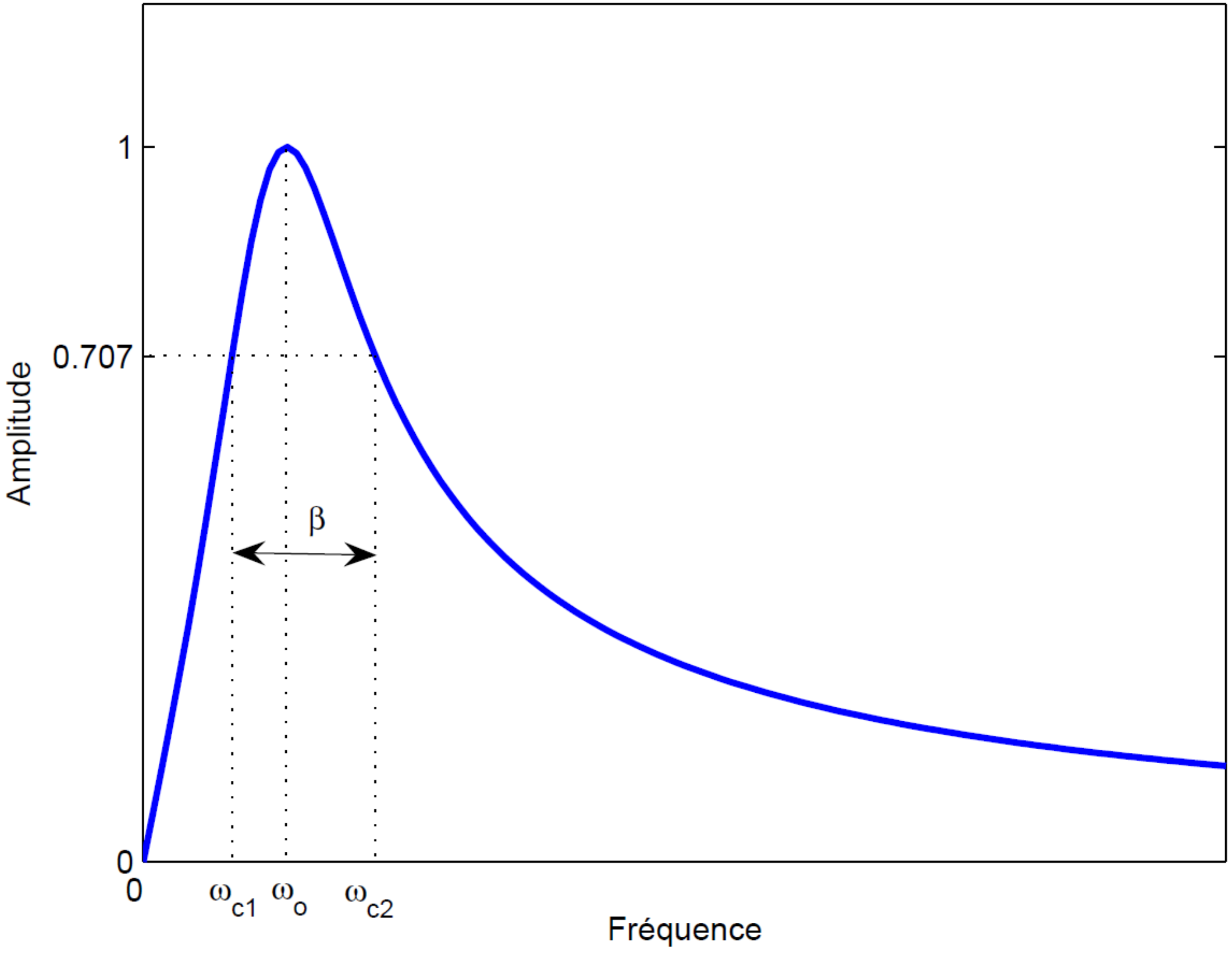


- A basses fréquences: la bobine inductance agit comme un ***court-circuit***, pas de courant dans la résistance donc $\underline{U}_{OUT} \longrightarrow 0$ V



- A une certaine fréquence, les impédance X_L et X_C s'annulent, $\underline{U}_{OUT} = \underline{U}_{IN}$

Filtre passe bande passif



Filtre passe bande passif

Le filtre passe bande le plus simple est un filtre d'ordre 2, dont la fonction de transfert se met sous la forme:

$$\underline{H}(\omega) = \frac{G_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

- Avec ω_0 la pulsation de résonance pour laquelle le gain est maximum ($\left|\underline{H}(\omega_0)\right| = \left|\underline{H}_{max}\right| = |G_0|$)

Filtre passe bande passif RLC

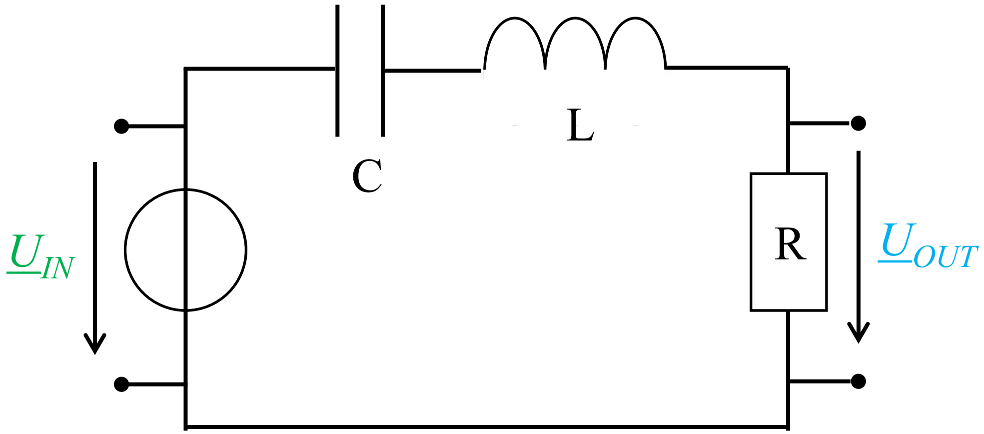


Diagramme de Bode

Comportement fréquentiel – étude des filtres

L'étude d'un filtre consiste en:

- Définir sa fonction de transfert

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{U}_{out}(\omega)}{\underline{U}_{in}(\omega)}$$

- Etudier l'évolution de $\underline{H}(\omega)$en fonction de la fréquence du signal d'entrée

- Représenter les variations du gain et du déphasage du signal de sortie par rapport au signal d'entrée en fonction de la fréquence

Les fonctions de transfert peuvent rapidement devenir compliquées …

Diagramme de Bode

Un diagramme de Bode est un moyen de représenter le comportement fréquentiel d'un système.

- Il permet une résolution graphique simplifiée
- l est utilisé afin de visualiser rapidement le gain et la phase en fonction de la fréquence

Le diagramme de Bode se fait sur une **échelle logarithmique** et est une approximation asymptotique.

Hendrik Wade Bode
(1905 – 1982)

Note:

- Une *octave* de fréquence est l'intervalle des fréquences comprises entre f et $2f$
- Une *décade* de fréquence est l'intervalle des fréquences comprises entre f et $10f$

Rappel logarithme

$$\log_k(a) = \frac{\ln(x)}{\ln(k)}$$

$$\log_k(a \cdot b) = \log_k(a) + \log_k(b)$$

$$\log_k(a^n) = n \cdot \log_k(a)$$

$$\log_k\left(\frac{a}{b}\right) = \log_k(a) - \log_k(b)$$

$$\log_k\left(\frac{1}{b}\right) = -\log_k(b)$$

$$\log_k(1) = 0$$

$$\log_k(k) = 1$$

Diagramme de Bode

Il est plus aisé et rapide d'étudier les fonctions de transfert en échelle logarithmique

Pour une fonction de transfert $\underline{H}(\omega)$ on va parler du gain en decibel (dB):

$$G_{dB}(\omega) = 20\log_{10}\left[\left|\underline{H}(\omega)\right|\right]$$

Diagramme de Bode: tracé en échelle logarithmique

$$G_{dB}(\omega) = 20\log_{10}\left[\left|\underline{H}(\omega)\right|\right]$$

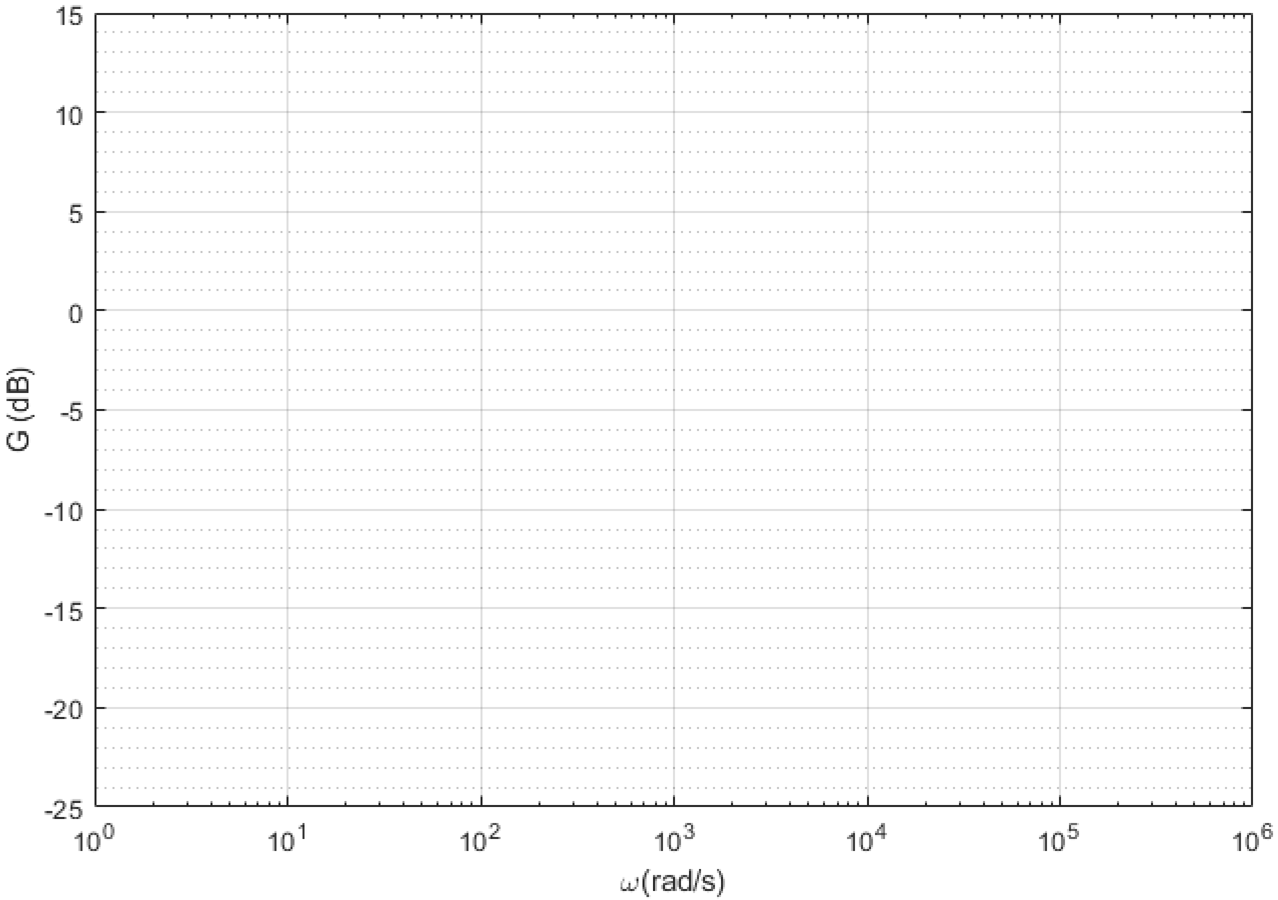
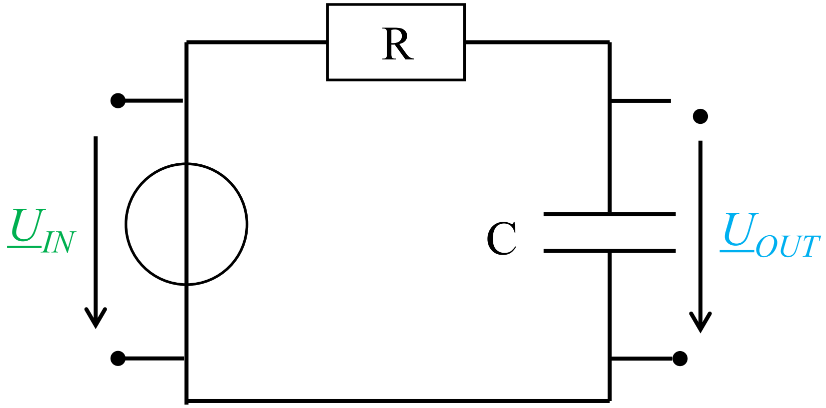


Diagramme de bode – exemple filtre RC



$$\underline{U}_{OUT} = \frac{Z_C}{(Z_C + Z_R)}\underline{U}_{IN} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)}\underline{U}_{IN}$$

$$\underline{U}_{OUT} = \frac{1}{1 + j\omega RC}\underline{U}_{IN} \Rightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Son module: $\left|\underline{H}(\omega)\right| = \dfrac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$

Sa phase: $\phi = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{1 + j\omega RC}\right) = 0 - \tan^{-1}(\omega RC)$

Son gain : $G_{dB} = 20\log_{10}\left[\left|\underline{H}(\omega)\right|\right] = 20\log_{10}\left[\dfrac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}\right]$

Diagramme de Bode - gain

On a donc: $$G_{dB} = 20\log_{10}\left[\frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\right] = 0 - 20\log_{10}\left(\sqrt{1+(\omega RC)^2}\right)$$

$$G_{dB} = -20\log_{10}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\frac{1}{RC}}\right)^2}\right)$$

Cas extremes:

- ω << $1/RC$

$$G_{dB} = -20\log_{10}(\sqrt{1})$$

$$G_{dB} = 0$$

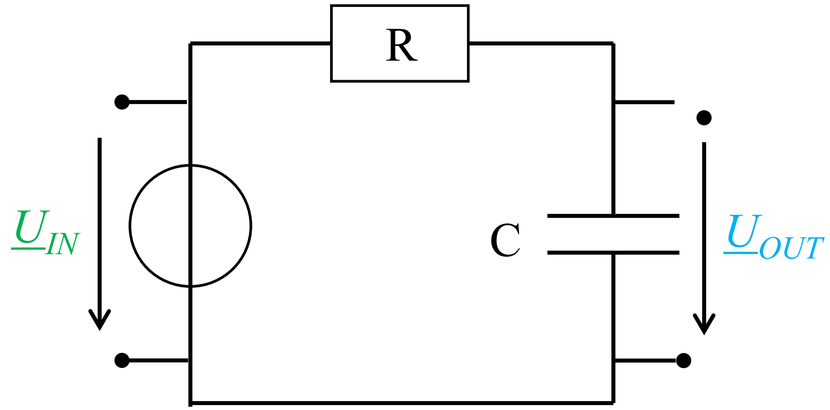
- ω >> $1/RC$

$$G_{dB} = -20\log_{10}\left(\sqrt{(RC\omega)^2}\right)$$

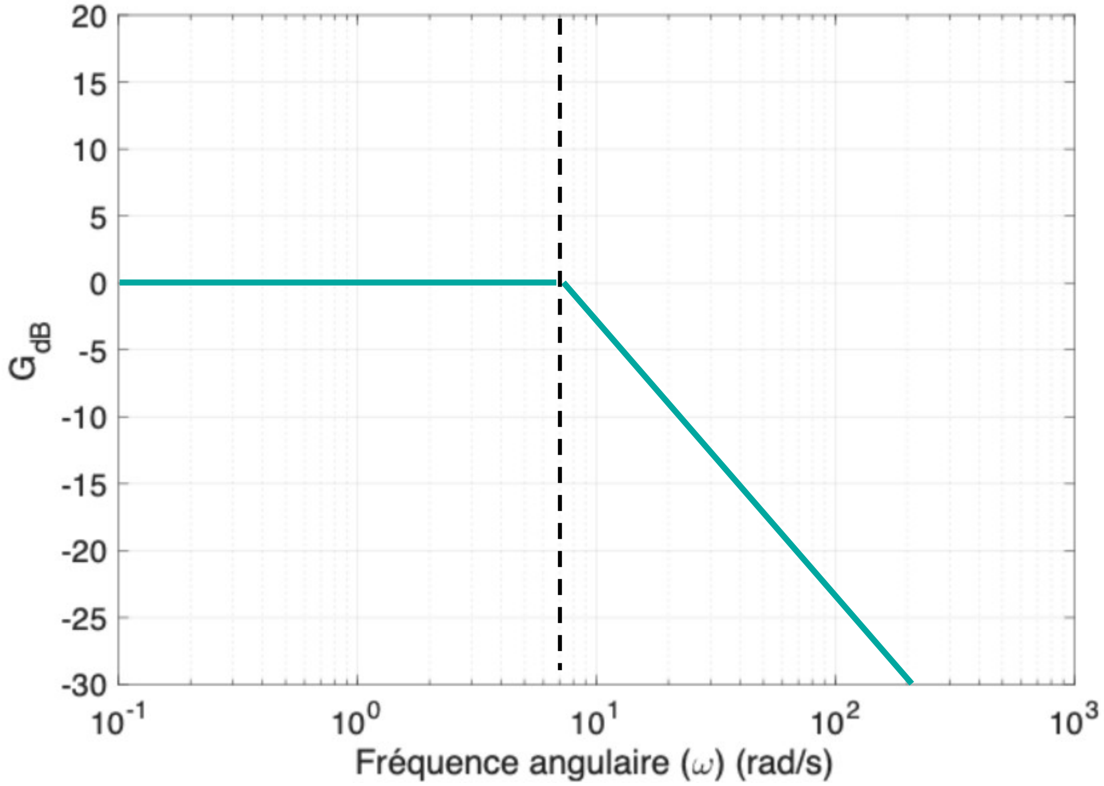
$$G_{dB} = 20\log_{10}\left(\frac{1}{RC}\right) - 20\log_{10}(\omega)$$

Le gain baisse de **-20 dB par décade**, asymptotiquement à partir du pole (valeur absolue) ω = $1/RC$

Diagramme de Bode - gain



$$G_{dB} = -20\log_{10}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\frac{1}{RC}}\right)^2}\right)$$



Forme générale

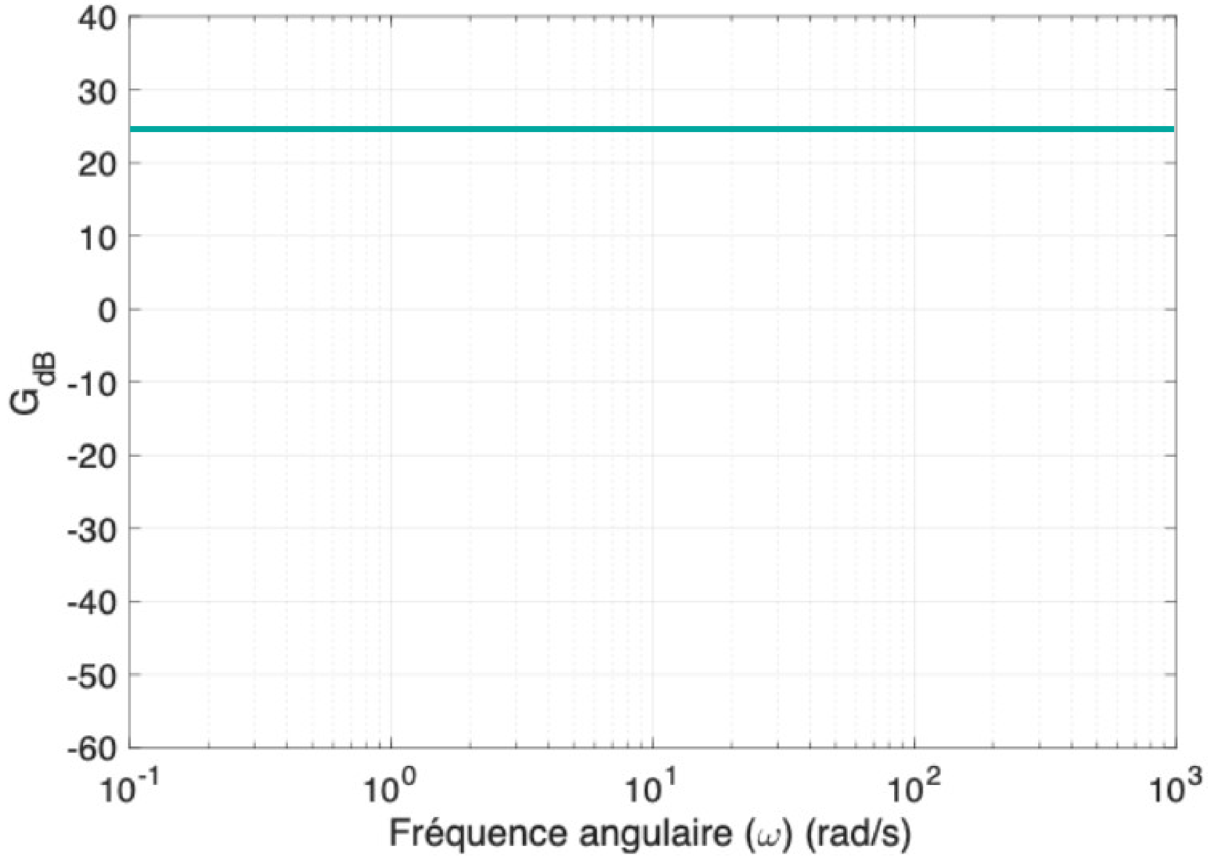
On appelle forme de Bode, toute fonction de transfert qui peut se mettre sous la forme:

$$\underline{H}(\omega) = K \frac{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right)\dots\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{(j\omega)^L\left(1 + j\frac{\omega}{\omega'_1}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega'_2}\right)\dots\left(1 + j\frac{\omega}{\omega'_n}\right)}$$

Pour tracer le gain de ces fonctions, il suffit de connaitre quelques formes 'simples':

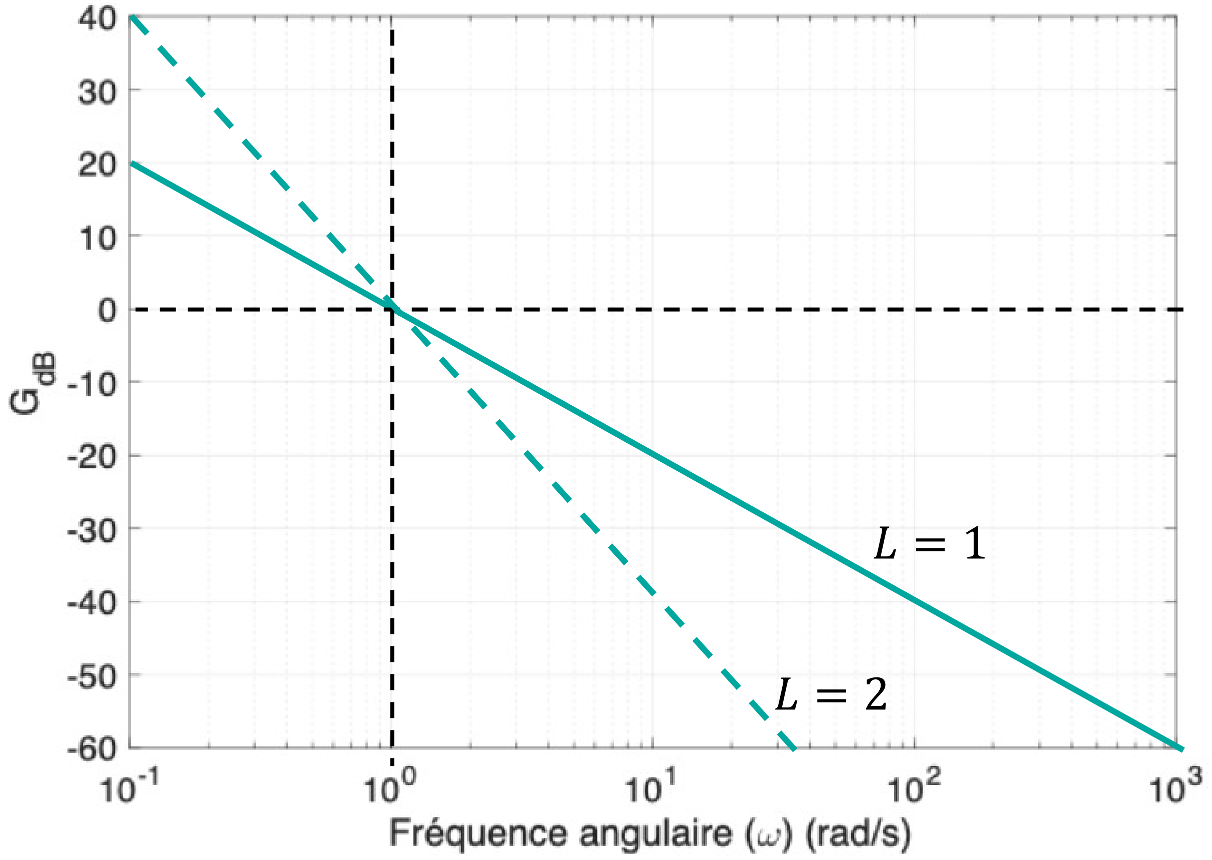
$$K, \frac{1}{(j\omega)^L}, \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\right), \frac{1}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$$

Constante K

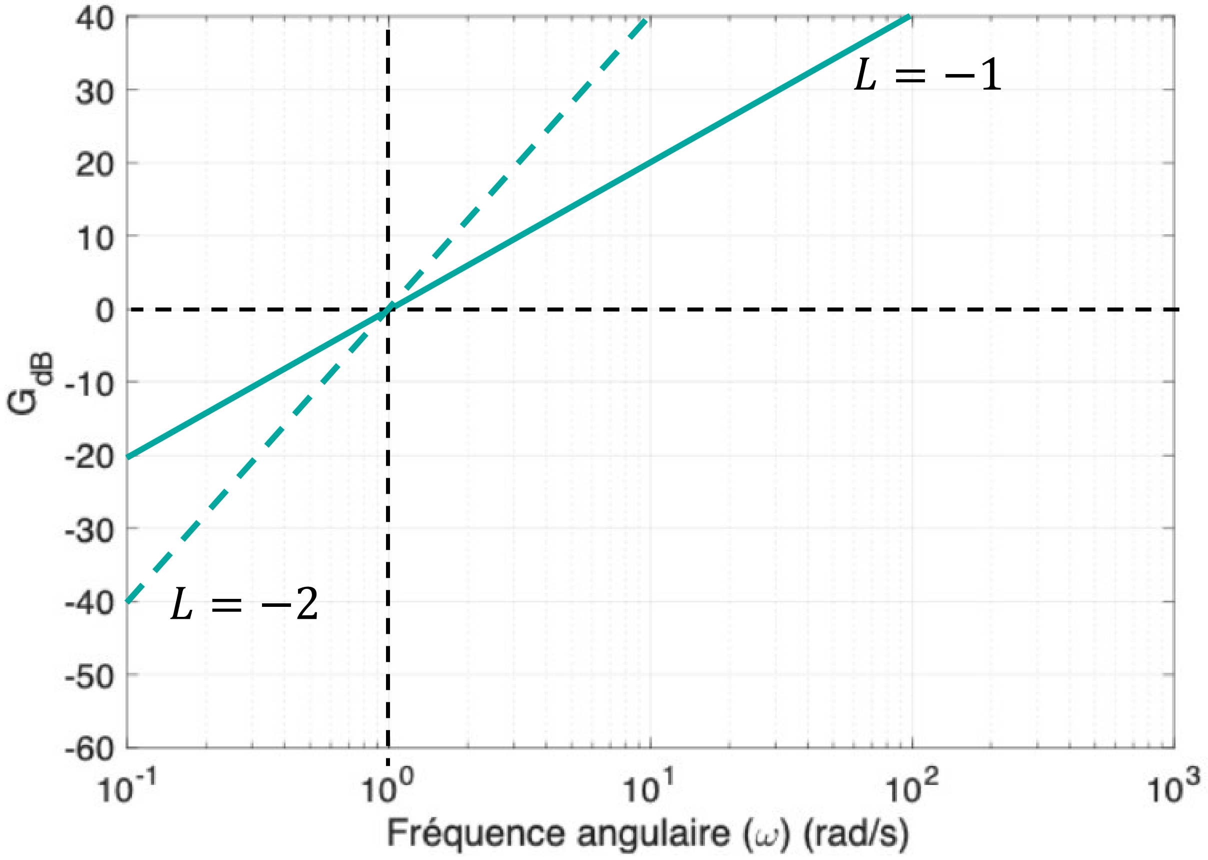


40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
G_{dB}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
Fréquence angulaire (ω) (rad/s)

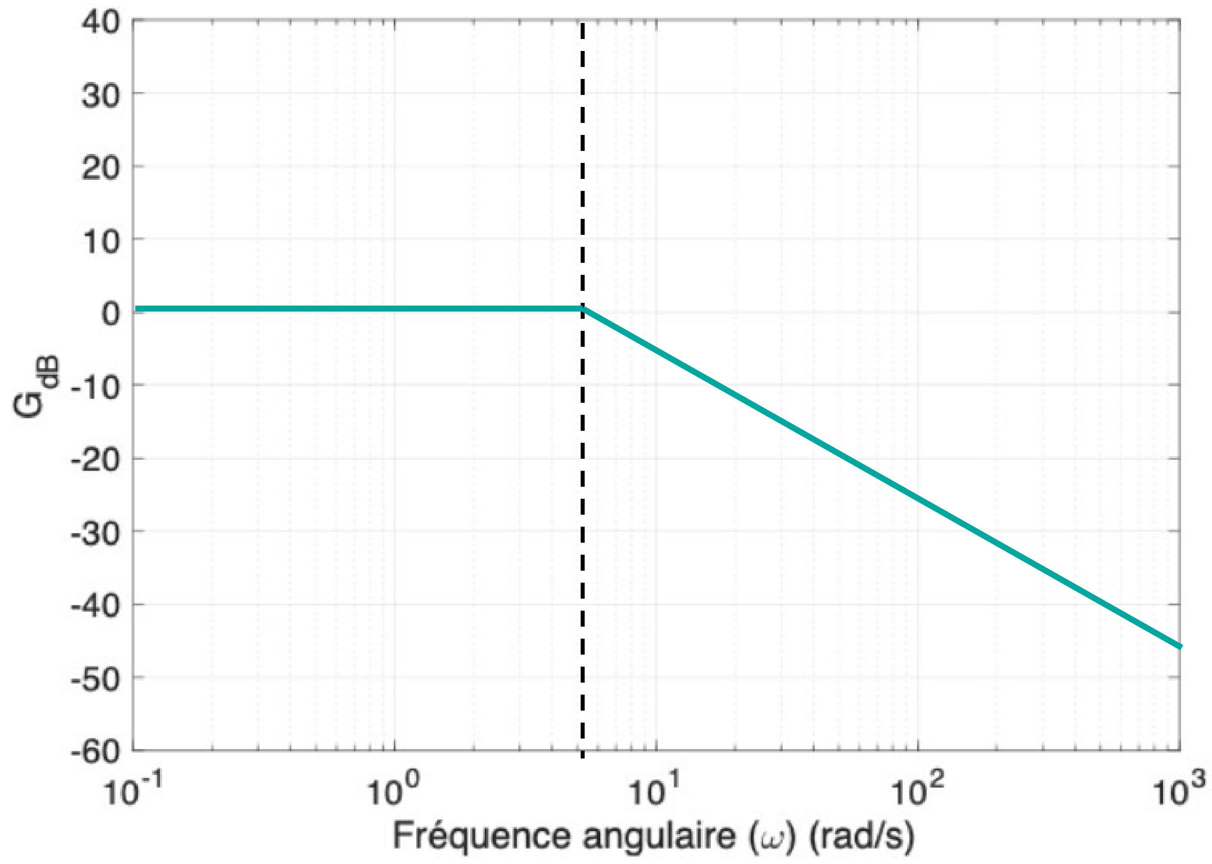
Le terme $\frac{1}{(j\omega)^L}$ pour $L > 0$



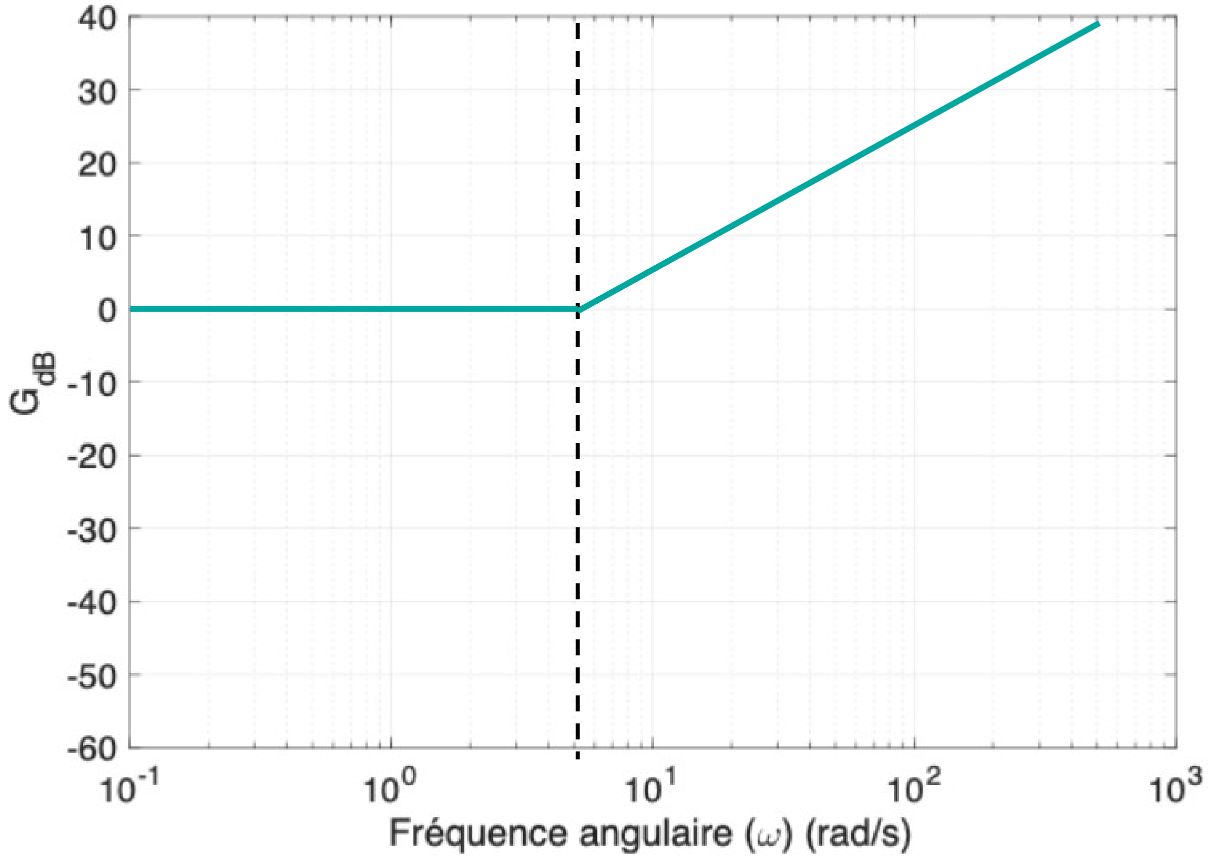
Le terme $\frac{1}{(j\omega)^L}$ pour $L < 0$



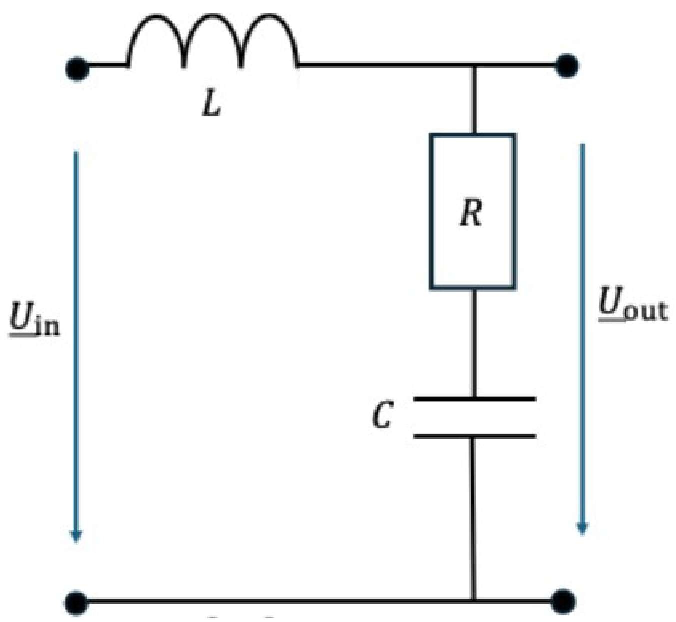
Le terme $\frac{1}{\left(1+j\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$



Le terme $\left(1 + j\,\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)$



Exemple

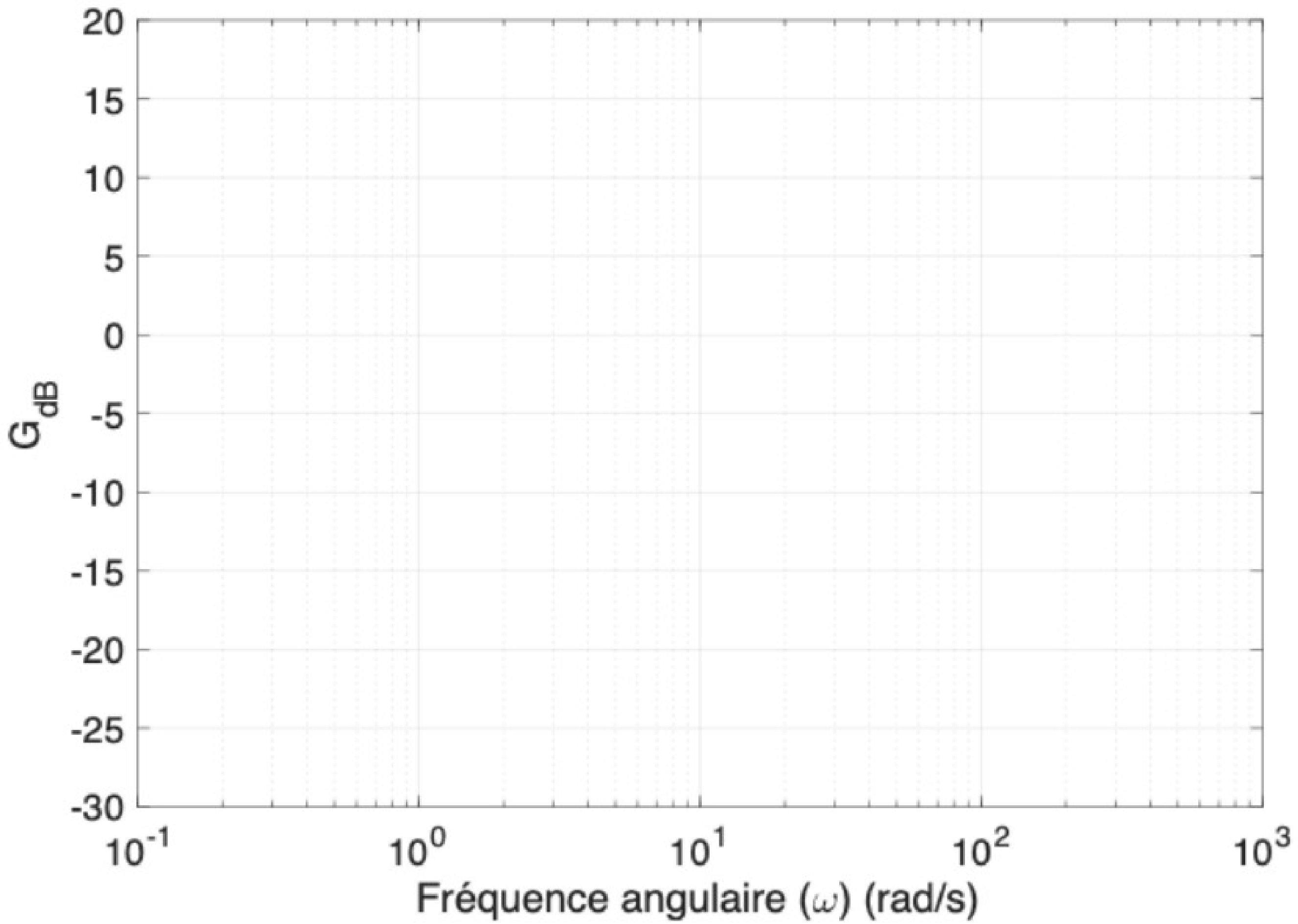


$R = 10\ \Omega$

$C = 100\ \text{mF}$

$L = 200\ \text{mH}$

Exemple



20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
-25
-30
G_{dB}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
Fréquence angulaire (ω) (rad/s)

Ce qu'il faut savoir

Les impédances dépendent de la fréquence et il est donc possible de construire des circuits réalisant des fonctions avancées, comme des filtres.

Un filtre peut être vu comme un quadripôle

- Sa fonction de transfert $\underline{H}(\omega)$ lie l'entrée à la sortie et dépend de la fréquence $\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{U}_{out}(\omega)}{\underline{U}_{in}(\omega)}$

Une fréquence de coupure et une fréquence à laquelle l'amplitude de la sortie est à $\frac{1}{\sqrt{2}}$ de la valeur maximale.

$$\left|\underline{H}(\omega_c)\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\underline{H}_{max}\right|$$

Les filtres passe-bande ont une fréquence de résonance

- fréquence à laquelle la fonction de transfert du filtre est purement réelle, i.e les impédances s'annulent.

Pour aller plus loin : Diagramme de Bode - phase

La phase est donnée par: $\tan^{-1}\left(\frac{Im}{Re}\right)$

Pour le terme K: nombre réel

- Si positif: $\phi = 0$
- Si négatif: $\phi = -180°$

Pour le terme $\frac{1}{(j\omega)^L}$, $L > 0$

- $\phi = -L \times 90°$

Pour le terme $\frac{1}{(j\omega)^L}$, $L < 0$, purement imaginaire positif

- $\phi = L \times 90°$

Pour aller plus loin : Diagramme de Bode - phase

Pour le terme $\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_c}\right)$, $\omega_c > 0$

Alors la phase est: $\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$

Cas extrêmes

- $\omega \ll \omega_c$, phase = 0°
- $\omega \gg \omega_c$, phase = 90°
- $\omega = \omega_c$, phase = 45°

Pour le terme $\left(\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}}\right)$, $\omega_c > 0$

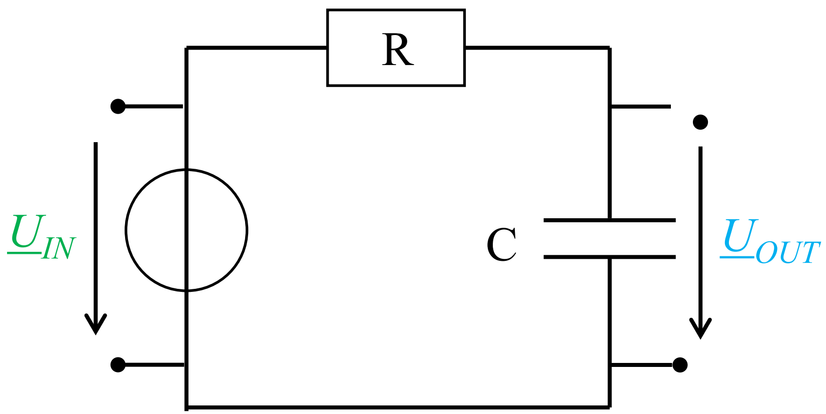
Alors la phase est: $-\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$

Cas extrêmes

- $\omega \ll \omega_c$, phase = 0°
- $\omega \gg \omega_c$, phase = - 90°
- $\omega = \omega_c$, phase = - 45°

Un déphasage de $\pm$45°/décade commence à fréquence ω_c /10, et s'arrête à fréquence 10 ω_c

Diagramme de Bode - phase



$$\phi = -\tan^{-1}(\omega RC)$$

$$\phi = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{1/_{RC}}\right)$$